Apellido: .... Nombre: .... Curso: ....

1er Parcial de **MATEMATICA SUPERIOR**

11 de mayo de 2015

TEMA: **47 B**

1	2			3			4	Nota Final
2 p.	1 p.	1 p.	1.5 p.	1 p.	1.5 p.	2 p.	2 p.	

LA NOTA ES N = X – 2 SIENDO X LA SUMA DE PUNTOS. TIEMPO: 90 MINUTOS

Ejercicio n° 1

Resuelva en C (complejos) la ecuación: $z^2 - 4z + 15 = 2j(z - 10)$

Ejercicio n° 2:

Indique la/s respuesta/s correcta/s y justifique:

2.1) El desarrollo en Serie Trigonométrica de Fourier de $f(t)=\begin{cases} |t|+1 & t\in(-1\,;1) \\ 2 & t\in(1\,;3)\end{cases}$ $\wedge$ $f(t)=f(t+4)$ es:

a) sin senos b) sin cosenos c) solo frecuencias impares d) solo frecuencias pares

2.2) El valor medio de la función anterior es: a) 1 b) 1.5 c) 1.75 d) 2

2.3) El valor de la integral: $\int_0^{\infty} t\cos(4t)\, e^{-3t}\, dt$ calculada por Transformada de Laplace es:

a) 0 b) -7/625 c) 1/75 d) infinito e) otro valor

Ejercicio n° 3:

Dada $G(s) = \dfrac{h(s^2 - ks + 15)}{(s^2 - 9)(s^2 + 8s + 25)}$ la transferencia de un sistema.

a) Halle $k \in R$ tal que el sistema sea estable. Justifique.

b) Con el valor hallado de k, calcule $h \in R^+$ tal que $|G(1+3j)| = \overset{2/\sqrt{61}}{\cancel{17/\sqrt{18}}}$

c) Con los valores de k y h hallados, halle la respuesta y(t) del sistema a la entrada: $x(t) = e^{5t}$

Ejercicio n° 4:

Resuelva utilizando transformada Z:

$$x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n) = -8 \bullet 4^n \quad \text{con } x(0)=-2 \;\wedge\; x(1)=-2$$

RESPUESTAS PARCIAL 1 TEMA 47 B

Ejercicio 1: Las raíces son: $5j$ y $4 - 3j$

Ejercicio 2:

2.1) solo cosenos por ser f par.

2.2) El valor medio es 1.75

2.3) $F(s) = \dfrac{s^2 - 16}{(s^2+16)^2}$ entonces $F(3) = -7/625$

Ejercicio 3: $G(s) = \dfrac{h(s^2 - ks + 15)}{(s^2 - 9)(s^2 + 8s + 25)}$

a) Para que el sistema sea estable, 3 no debe ser polo entonces debe anularse en 3 el numerador:

$3^2 - 3k + 15 = 0$ entonces $k = 8$

b) $G(s) = \dfrac{h(s-3)(s-5)}{(s-3)(s+3)(s^2+8s+25)} = \dfrac{h(s-5)}{(s+3)(s^2+8s+25)}$

Los polos son: -3 , $-4 + 3j$ y $-4 - 3j$ y los ceros son: 5 e infinito

$2/\sqrt{61}$

$| G(1+3j) | = \dfrac{h\,5}{5\,5\sqrt{52}} = \dfrac{h}{\cancel{5\,2\sqrt{13}}} = 1/\sqrt{13}$ entonces: $h = 10$

$\sqrt{61}$

c) Como $x(t) = e^{5t}$ entonces $X(s) = \dfrac{1}{s-5}$

Recordemos que la salida $Y(s)$ es: $Y(s) = G(s) \cdot X(s)$

Entonces: $Y(s) = \dfrac{h(s-5)}{(s+3)(s^2+8s+25)} \cdot \dfrac{1}{s-5} = \dfrac{h}{(s+3)(s^2+8s+25)}$

Descomponemos en fracciones simples:

$Y(s) = \dfrac{A}{s+3} + \dfrac{Bs + C}{s^2+8s+25} = \dfrac{A(s^2+8s+25) + Bs(s+3) + C(s+3)}{(s+3)(s^2+8s+25)}$

Igualando los numeradores: $A(s^2+8s+25) + B(s^2+3s) + C(s+3) = 10$

Por lo tanto: $A + B = 0 \ \wedge\ 8A + 3B + C = 0 \ \wedge\ 25A + 3C = 10$

Como el valor de A es: $10/10 = 1 \Rightarrow B = -1 \ \wedge\ C = -5$

Volviendo a $Y(s)$: $Y(s) = 1 \cdot \dfrac{1}{s+3} - 1\,\dfrac{s}{(s+4)+9} - 5\,\dfrac{1}{(s+4)+9}$

O bien: $Y(s) = \dfrac{1}{s+3} - \dfrac{s+4}{(s+4)+9} + (-5+4)/3\,\dfrac{3}{(s+4)+9}$

Antitransformando: $y(t) = e^{-3t} - \cos(3t)\,e^{-4t} - 1/3\,\mathrm{sen}(3t)\,e^{-4t}$

Ejercicio 4:

$x(n+2) - 4\,x(n+1) + 4\,x(n) = -8 \bullet 4^n$ con $x(0)=-2 \ \wedge\ x(1)=-2$

$z^2 (X(z) + 2 + 2/z) - 4 z (X(z) + 2) + X(z) = -8z/ z-4$

$X(z) (z^2 - 4z + 4) = -8z/ z-4 - 2 z^2 - 2 z + 8 z$

$X(z) (z^2 - 4 z + 4) = (-8z - 2 z^2 (z - 4) + 6 z (z-4)) / (z-4)$

$X(z) (z^2 - 4 z + 4) = (-8z - 2 z^3 + 8 z^2 + 6z^2 -24 z) / (z-4)$

$X(z) (z^2 - 4 z + 4) = (-2 z^3 + 14 z^2 - 32z) / (z-4)$

$X(z) = (-2 z^3 + 14 z^2 - 32z) / (z-4) (z-2)^2$

$X(z) = z [(-2z^2 + 14 z -32) /(z-4)(z-2)^2]$

$X(z) = z [A / (z-4) + B / (z-2)^2 + C /(z-2)]$

$A= -32 + 56 - 32 / 4 = -2$ $\quad$ $B= (-8 + 28 -32)/-2= 6$ $\quad$ $-4A + B - 6 C = 14$ entonces $C = 0$

$X(z) = -2z / (z-4) + 6 z (z-2)^2$

Antitransformo: $\quad x(n) = -2\ 4^n + 3\ n\ 2^n$

Ahora 10min

tema 47B

Mat Sup. 1º parcial

11-5-15

$\boxed{\text{EJ 1}}$ Resuelva en $\mathbb{C}$ (complejos) la ecuación: $z^2 - 4z + 15 = 2j(z-10)$

$$z^2 - 4z + 15 = 2jz - 20j \rightarrow z^2 + (-4-2j)z + (15+20j) = 0$$

$$a = 1 \; ; \; b = -(4+2j) \; ; \; c = 15 + 20j$$

$$z_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4+2j + \sqrt{12+16j - 4\cdot(15+20j)}}{2} = \frac{4+2j + w_{1,2}}{2}$$

$$w^2 = -48 - 64j \rightarrow w_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{80+(-48)}{2}} \mp \sqrt{\frac{80-(-48)}{2}}\,j \quad \begin{cases} w_1 = 4 - 8j \\ w_2 = -4 + 8j \end{cases}$$

$$|w| = 80 \; ; \; x = -48$$

$$\rightarrow z_1 = \frac{4+2j+w_1}{2} = \frac{4+2j+4-8j}{2} = \frac{8-6j}{2} = \boxed{4-3j = z_1} \checkmark$$

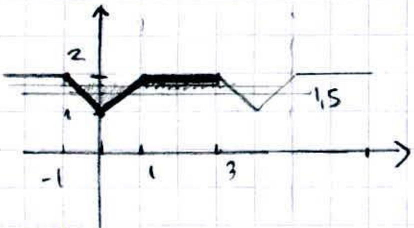
$$z_2 = \frac{4+2j+w_2}{2} = \frac{4+2j-4+8j}{2} = \frac{10j}{2} = \boxed{5j = z_2} \checkmark$$

$\boxed{\text{EJ 2}}$ Indique la/s respuesta/s correcta/s y justifique:

2.1.) El desarrollo en serie trigonométrica de Fourier de $f(t) = \begin{cases} |t|+1 & t \in (-1,1) \\ 2 & t \in (1,3) \end{cases}$

$f(t) = f(t+4)$ es:

a) sin senos b) sin cosenos c) solo frec. impares d) solo fr. pares



Es una función par (simétrica reflexiva en eje y) → es función con cosenos

2.2) El valor medio de la función anterior es: a) 1 b) 1,5 c) 1,75 d) 2

No tiene áreas iguales

$\rightarrow 2 \times 0{,}25 + \frac{0{,}25 \times 0{,}25}{2} \times 2 = \frac{9}{16}$

$\rightarrow 0{,}75 \times 0{,}75 = \frac{9}{16}$

$= \checkmark$

2.3) El valor de la integral: $\int_0^\infty t \cos(4t)\, e^{-3t}\, dt$ calculada por transformada de Laplace es:

a) 0 b) $-7/625$ c) $1/75$ d) infinito e) otro valor

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \xrightarrow[f(t) = t\cos(4t)]{\text{tomo}} F(s) = \int_0^\infty \underbrace{t\cos(4t)}_{f(t)}\, e^{-st}\, dt$$

quiero hallar el valor de $F(s)$ para $s = 3$

$$f(t) = t\cos(4t) = t\, g(t) \rightarrow F(s) = (-1)^1\, G'(s) = \frac{s^2 - 16}{(s^2+16)^2} = F(s) \rightarrow F(3) = -7/625$$

$$G(s) = \frac{s}{s^2+16} \rightarrow G'(s) = \frac{(s^2+16) - s\, 2s}{(s^2+16)^2} = \frac{-s^2+16}{(s^2+16)^2}$$

EJ 3 Dado $G(s) = \dfrac{h\,(s^2 - ks + 15)}{(s^2-9)\,(s^2+8s+25)}$ la transf. de un sistema

a) Halle $k \in \mathbb{R}$ tal que el sistema sea estable. Justifique.

Para que el sistema sea estable, todos los polos tienen que tener parte real > 0

$$G(s) = \frac{h\,(s^2-ks+15)}{(s+3)\,\underbrace{(s-3)}_{\text{éste no puede ser polo}}\,[(s+4)^2+9]} \rightarrow s^2-ks+15=0 \text{ con } s=3$$

$$3^2 - k3 + 15 = 0 \rightarrow \boxed{k=8}$$

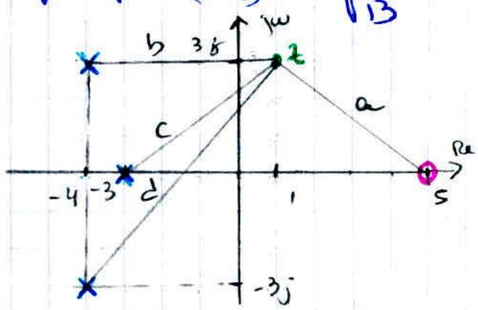
$$24 = k3$$

b) Con el valor hallado de k, calcule $h \in \mathbb{R}$ tal que $\left|G(\overset{z}{1+3j})\right| = \frac{1}{\sqrt{13}}$

$$G(s) = \frac{h\,(s-5)\cancel{(s-3)}}{(s+3)\cancel{(s-3)}[(s+4)^2+9]} = \frac{h\,(s-5)}{(s+3)[(s+4)^2+9]}$$

Ceros: $5\,;\,\infty$
Polos: $-3,\ -4 \pm 3j$

$$|G(1+3j)| = \frac{h\,a}{b \cdot c \cdot d} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$



$$|G(1+3j)| = \frac{h \cdot \cancel{5}}{5 \cdot \cancel{5} \cdot \sqrt{61}} = \frac{2}{\sqrt{61}} \rightarrow \boxed{h = 10}$$

c) Con los valores de k y h hallados, halle la respuesta $y(t)$ del sistema a la entrada $x(t) = e^{5t} \rightarrow X(s) = \frac{1}{s-5}$

$$Y(s) = G(s)\cdot X(s) = \frac{10\,\cancel{(s-5)}}{(s+3)[(s+4)^2+9]}\cdot\frac{1}{\cancel{(s-5)}} = \frac{10}{(s+3)[(s+4)^2+9]} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+8s+25}$$

$$\rightarrow A(s^2+8s+25) + B(s^2+3s) + C(s+3) = 10 \rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 8A + 3B + C = 0 \\ 25A + 3C = 10 \end{cases} \quad \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -1 \\ C &= -5 \end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{-s-5}{(s+4)^2+9} = \frac{1}{s+3} - \frac{s+4}{(s+4)^2+9} - {}^{3}\frac{1}{3(s+4)^2+9} \rightarrow \boxed{y(t) = e^{-3t} - e^{-4t}\left(\cos(3t) + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{sen}(3t)\right)}$$

EJ 4 Resuelva utilizando transformada Z:

$$x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n) = -8 \cdot 4^n \qquad \begin{aligned} x(0) &= -2 \\ x(1) &= -2 \end{aligned}$$

$$z^2\left[X(z) \overset{+2}{-x(0)} \overset{+2}{-\frac{x(1)}{z}}\right] - 4z\left[X(z) \overset{+2}{-x(0)}\right] + 4X(z) = \frac{-8z}{z-4}$$

$$X(z)\,(z^2-4z+4) = \frac{-8z}{z-4} - 2z^2 \overbrace{-2z + 8z}^{6z} = \frac{-8z - 2z^3 + 8z^2 + 6z^2 - 24z}{z-4} = \frac{z(-2z^2+14z-32)}{z-4}$$

$$X(z) = z\left[\frac{-2z^2+14z-32}{(z-4)\,(z-2)^2}\right] = z\left[\frac{\overset{-8/4}{A}}{z-4} + \frac{B}{z-2} + \frac{\overset{-12/-2}{C}}{(z-2)^2}\right] = \frac{-2z}{z-4} + \frac{6z}{(z-2)^2} = X(z)$$

$$\rightarrow A(z^2+4z+4) + B(z^2-6z+8) + C(z-4) = -2z^2+14z-32 \rightarrow \begin{cases} A + B = -2 \\ -4A - 6B + C = 14 \\ 4A + 8B - 4C = -32 \end{cases} \quad \begin{aligned} A &= -2 \\ B &= 0 \\ C &= 6 \end{aligned}$$

$$X(z) = \frac{-2z}{z-4} + \frac{3 \times 2z}{(z-2)^2} \rightarrow \boxed{x(n) = -2 \times 4^n + 3n\,2^n}$$